# 動的システムのモデル形成とその検定 (制御過程論研究会報告集 I)

AUTHOR(S):

茅, 陽一

CITATION:

茅, 陽一. 動的システムのモデル形成とその検定 (制御過程論研究会報告集 I). 数理解析研究所講究録 1970, 99: 69-78

ISSUE DATE:

1970-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/108216

数理解析研究所講究録
99巻 1970年 69-78


# 動的システムのモデル形成とその検定

東大 工学部　　茅 陽一

ここでは可観測な動的システムの線形モデルの形成と，形成されたモデルが真に適合するものであるかの検定の手法について、筆者の研究を中心に述べる。

## §1. モデルの表現

nonparametric model を別とすれば，モデルは伝達関数モデル・状態方程式モデルの二種が考えられる。しかし，いずれの場合も，その表現に含まれるパラメータ数は同一と考えてよい。

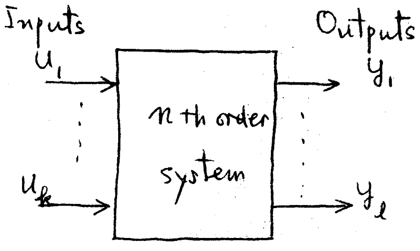


Fig. 1

一見，Fig.1 のように多入出力系では，状態方程式モデルの方が統一的でとり扱い易いように思われるが，実はそうではない。

通常用いられる表現法としては，Fig.2 の形があるが，観測される出力 $y$ は，実際には Fig.2 の形にはかけないことが多い。すなわち

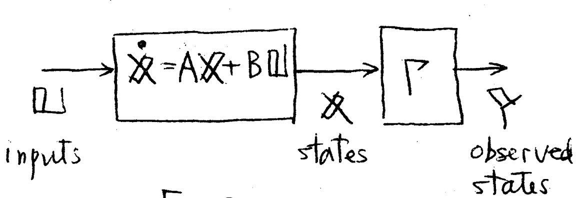


Fig. 2

$$Y = PX + P_1\dot{U} + \cdots + P_n U^{(n-1)}$$

そこで以下では伝達関数モデルを考える。

## §2. 伝達関数モデル形成の手法

問題。

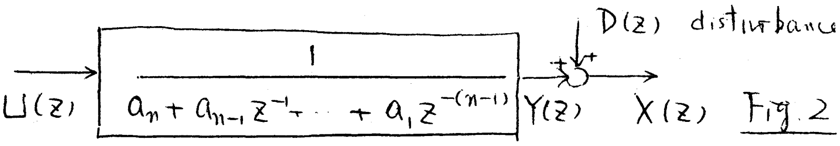


Fig. 2

$\{u_i, x_i;\ i=1,2,\ldots,N+n-1\}$ のデータから $\{a_1,\ldots,a_n\}$ を推定せよ。ただし $\{d_i;\ i=1,\ldots,N+n-1\}$ は $\{u_i\}$ と無相関で平均値零の弱定常不規則過程とする。

基本式。 この場合は次式が成立。

$$V_N(x)\cdot a = V_N^n(u) + V_N(d)\cdot a \qquad (1)$$

ただし

$$V_N(x) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & & \\ x_N & & x_{N+n-1} \end{bmatrix},\quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$V_N^n(\cdot)$ は $V_N(\cdot)$ の中n列 (2)

推定手法の大別と推定の式。

A. 式誤差最小形(線形回帰形)(1)〜(3)

$$\hat{a} = (V_N^T(x)V_N(x))^{-1} V_N^T(x)\, V_N^n(u) \qquad (3)$$

B. 実誤差最小形(非線形回帰形)(4)〜(6)

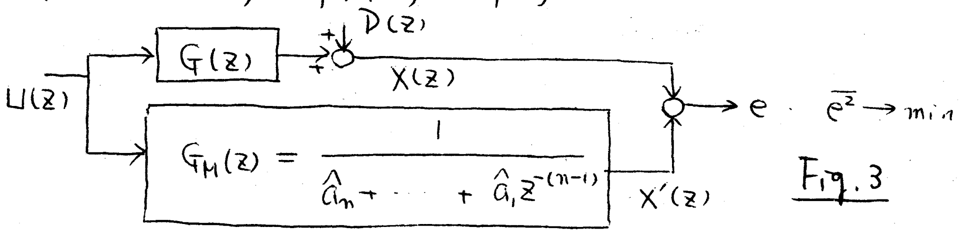


Fig. 3

特にGauss-Newton近似により逐次的に解を求めるときは

$$\delta\hat{a} = (V_N^T(w)\,V_N(w))^{-1}\,V_N^T(w)\,V_N^{n}(u) \qquad (4)$$

ここでwは$X'$を更に$-G_M(z)$をとおした出力をあらわす。

C．補助変数行列(Instrumental Variable Matrix)の応用。[7][8]

$$\hat{a} = (Z_N^T\,V_N(z))^{-1}\,Z_N^T V_N^{n}(u) \qquad (5)$$

$Z_N$として$V_N(y)$をえらぶと最適。

各方式の特徴。

| | 式誤差最小形 | 実誤差最小形 | 補助変数行列の応用 |
|---|---|---|---|
| 評価基準<br>n既知<br>n未知 | 不明 | 実際の$\overline{e^2}\to min$ | Min Max$\Vert\hat{a}-a\Vert$<br>不明 |
| 外乱の影響<br>on-line<br>off-line | 偏りをもつ<br>〃 | 偏りなし | 偏りなし<br>一致性を有する |
| 解が得られるか | 必ず得られる | 試行論理によって収束性が異る | 最適解への収束性は保証されない |
| 計算量 | 少い | 多い | 多い |

Cの手法の改良。　Cの手法は，$\overline{e^2}\to min$の条件をみたしていないので，収束解が実誤差最小形に比し劣った性質をもつ。ここで，収束解が$\overline{e^2}\to min$をみたすよう計算モードを変更する。すなわち，k回目の試行で得られたモデルを$G_M^k(z)$

として，k回目の試行結果は

$$\hat{a}_k = \left( V_N^T(\tilde{y})\, V_N(\hat{x}) \right)^{-1} V_N^T(\tilde{y})\, V_N^n(\tilde{u}) \qquad (6)$$

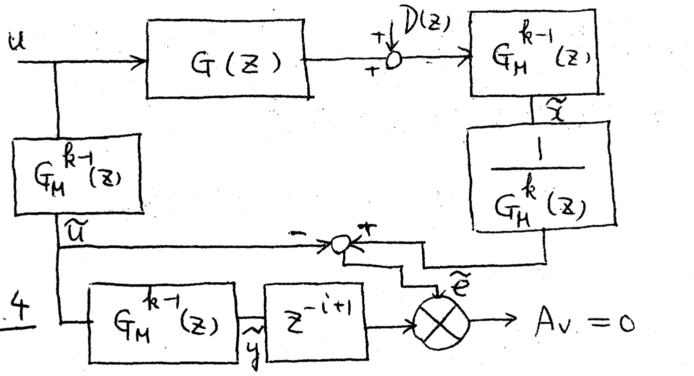


Fig. 4

この方法だと，収束解附近で $\tilde{e}$ は実誤差と一致し，$\overline{e\frac{\partial e}{\partial \hat{a}}} \to 0$ の解が得られる。

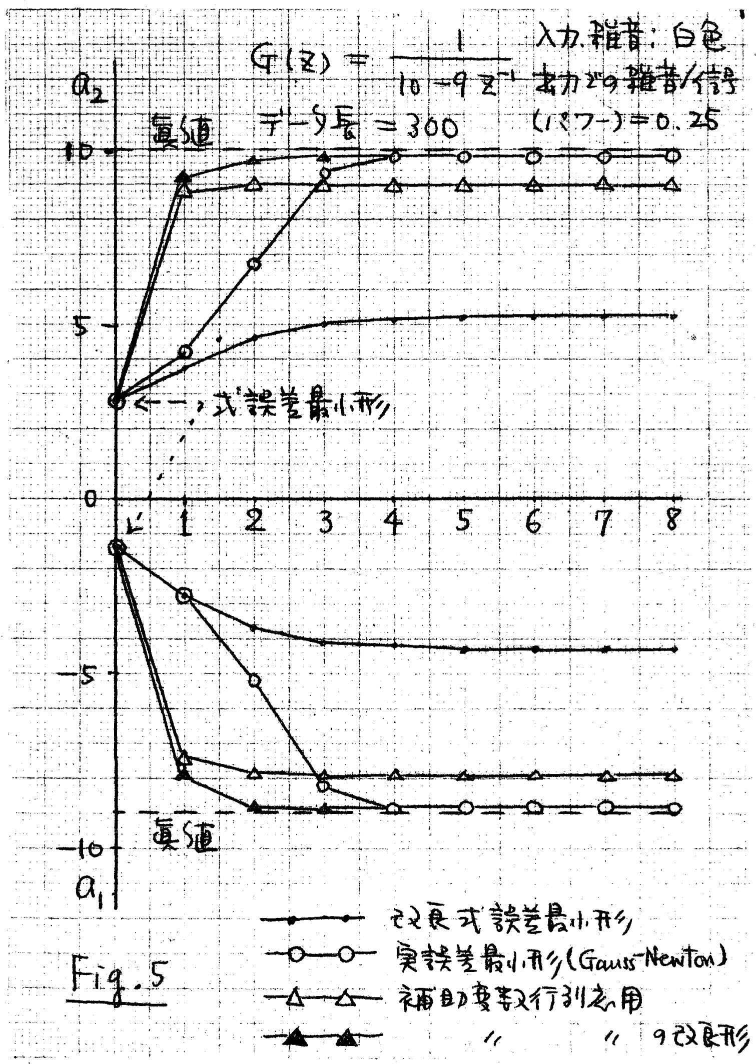


Fig. 5

手法改良の方向。

方法としてはB，Cの改良形が今の処有効。しかし，多パラメータのときは収束性に問題があり，この点の改良が今后の問題となる。

Fig. 5は，一次系の伝達関数推定の一例である。

## §3. モデル検定問題

問題としては次の二種があげられる。

A. 対象システムの線形性の検定

B. 線形システムの伝達関数次数の検定

これらの研究は数多い。筆者はAについても検討しているが、ここではBについて述べる。

これに関しては、次のような手法が考えられている。

(1) 外乱が白色とわかっているとき、システム・モデルの出力差の白色性を検定する方法。(Aström[9])

(2) 式(3)(4)の $V_N^T(x)V_N(x)$ や $V_N^T(w)V_N(w)$ の singularity を検定する方法。(Lee[3])

(3) 評価基準の変更に対するモデルパラメータ変化を検定する方法。(筆者[6])

(4) モデルの附加高次パラメータに関する評価基準の変分が零となるかどうかを検定する方法。(筆者)

検定の確実さ・計算量・検定に必要なデータ長等の諸条件を考慮したときは、(4)がもっとも秀れた方法と思われる。これについて以下説明する。

## §4. パラメータに対する変分検出によるモデル検定

簡単のため、Fig. 6 の一次系とそのモデルをとりあげる。

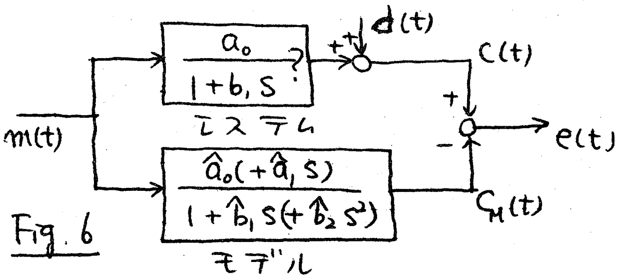


Fig. 6

**原理。**

$$I=\overline{e^2}=\frac{1}{T}\int_0^T e^2dt \quad (6)$$

を考えたとき，システムが一次で，

$$\hat{a}_0=a_0,\quad \hat{b}_1=b_1 \quad (7)$$

であるならば $\left(\frac{\partial I}{\partial \hat{a}_1}\right)_0=\left(\frac{\partial I}{\partial \hat{b}_2}\right)_0=0$ ; ただし $(\quad)_0=(\quad)_{\hat{a}_1=\hat{b}_2=0}$ (8)

であり，システムが一次でなければ(8)は一般に成立しない。

**検定手順。** 1) 与えられたデータ，モデル（$=\hat{a}_0/(1+\hat{b}_1 s)$）から，

$$\left(\left(\frac{\partial I}{\partial \hat{a}_1}\right)_0,\left(\frac{\partial I}{\partial \hat{b}_2}\right)_0\right)=-2\left(\overline{m_{a_1}e},\ \overline{m_{b_2}e}\right) \quad (9)$$

を，下のように小分割された各区間毎に求める。

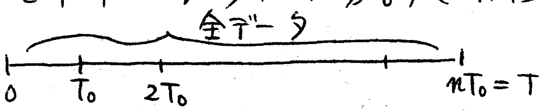


Fig. 7

ただし，$m_{a1}, m_{b2}$は

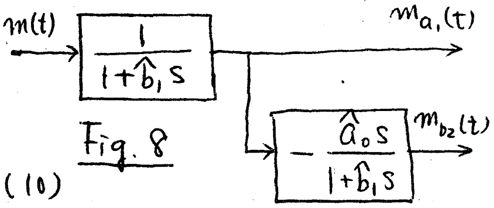


Fig. 8

これらを，

$$g_i=(g_{ai},\ g_{bi})\ ;\ i=1,2,\cdots,n \quad (10)$$

とする。

2) $T_0$がある程度以上長ければ，$\{g_i\}$は，それぞれ独立な正規不規則過程であるから，

$$t_a=\frac{\sqrt{n-1}\ \overline{g_a}}{\sigma_a},\quad t_b=\frac{\sqrt{n-1}\ \overline{g_b}}{\sigma_b} \quad (11)$$

は自由度$n$の$t$分布をなす筈である。ただし

$$\overline{g}_{a(b)} = \frac{1}{n}\sum g_{a(b)i},\quad \sigma_{a(b)} = \left[\frac{1}{n}\sum\left(g_{a(b)i} - \overline{g}_{a(b)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (12)$$

そこで、次のStudentの検定法を用いる。

有意水準$\gamma$として

$$\begin{cases} |t_a| \le t_{\frac{\gamma}{2}} \text{ かつ } |t_b| \le t_{\frac{\gamma}{2}} & ;\text{モデルを採択する。} \\ |t_a| > t_{\frac{\gamma}{2}} \text{ または } |t_b| > t_{\frac{\gamma}{2}} & ;\text{モデルを棄却する。} \end{cases}$$

必要データ長の例。　上記手法の有効性を調べるために、

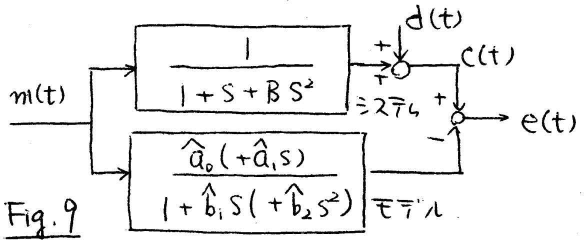


Fig.9

Fig.9の場合について、確率95%で一次モデルを棄却できるためのデータ長Tを、二次係数Bの関数として理論的に求めた。この場合

$m(t)$：$\Phi_{mm}(\omega) = \frac{2\omega_m}{\omega^2+\omega_m^2}$　$\omega_m = 10$。

$d(t)$：$\Phi_{nn}(\omega) = 0.1 \times \frac{2\omega_n}{\omega^2+\omega_n^2}$　$\omega_n \gg \omega_m$。

$m(t), d(t)$は共に正規定常不規則過程。

また、計算では$t$-分布を正規分布で近似している。結果をFig.10に示す。

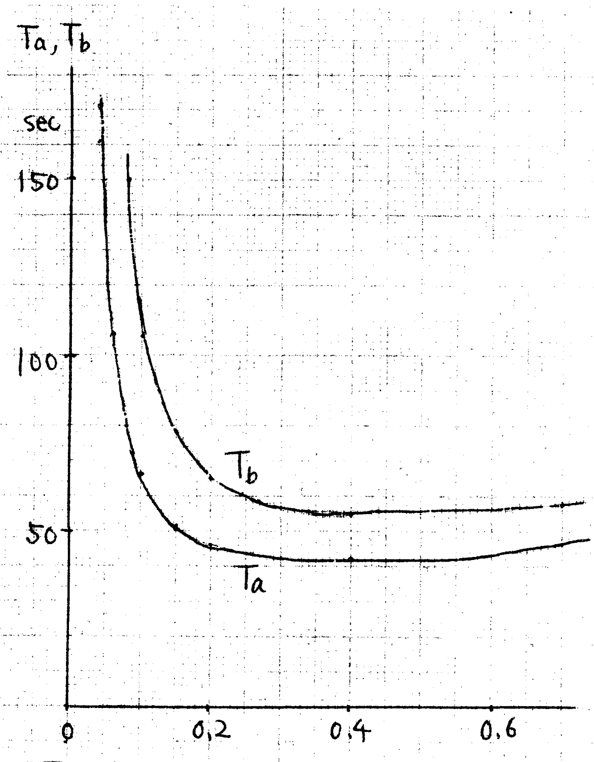


Fig.10

たとえば B = 0.2 のときシステムの伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{1+s+0.2s^2} \simeq \frac{1}{(1+0.78s)(1+0.22s)} \qquad (13)$$

このときの必要データ長はほぼ 65 sec である。このように データ長がかなり短かくて済むことに注目の要があろう。

<u>検定の例。</u> Fig. 9 のシステムで、B = 0.390、d(t) は

$$\overline{d^2(t)} = k_n^2 \qquad (14)$$

の白色雑音、m(t) は振巾1のステップ関数で、これを10回くり返すものとする。モデルは

$$G_M(s) = \frac{1.00}{1+1.05s} \qquad (15)$$

で、ステップのくり返し回数が無限大のときの最適解として得られる一次モデルである。

このときの各回の $g_a$, $g_b$、その平均 $\bar{g}_a$, $\bar{g}_b$、分散 $\sigma_a^2$, $\sigma_b^2$、それから求めた $t_a$, $t_b$ をノイズレベル $k_n^2$ が 1 と 0.16 の場合について表1に示す。また、システムと式(15)のモデルのステップ応答は Fig. 11 のようである。

## §5. 高次系の同定と制御

システムが高次のときは、これを適当に低次近似し、その上で制御を行なうのが実際的である。この場合は

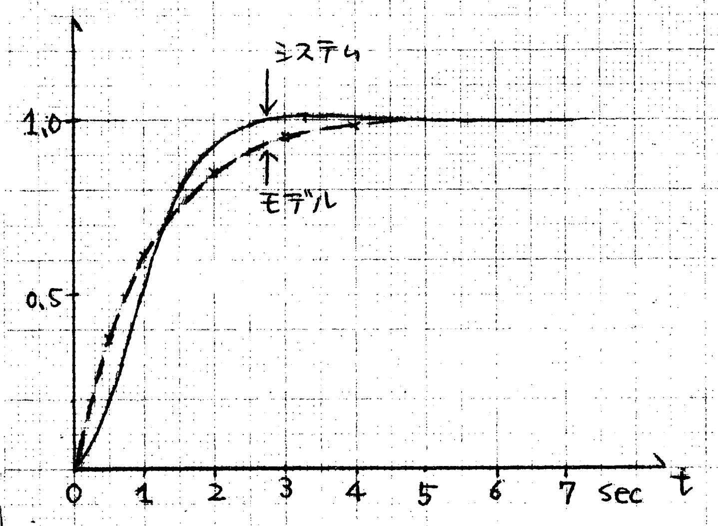


Fig. 11

(1) システムモデルの決定

(2) (1)のモデルにもとづく最適制御法則の決定

の二段階になるが、システムモデルは制御入力の関数となるため、(1)→(2)→(1)→ ‐‐‐と試行を行なった収束解が始めて意味をもつ解になる。

この点は、システムの状態推定(Kalman−Bucy filter)とそれにもとづく最適制御を行なう問題とは本質的に異なる点である。(この場合両者の個々の最適化が全体の最適化を意味す

| $q$ / 試行回 | $K_n^2=1.0$ | | $K_n^2=0.16$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $\hat{a}_1$ | $\hat{b}_2$ | $\hat{a}_1$ | $\hat{b}_2$ |
| 1 | +0.0204 | −0.0060 | $+0.446\times10^{-2}$ | $+0.142\times10^{-2}$ |
| 2 | −0.0178 | +0.0178 | −1.086 | +1.092 |
| 3 | −0.0296 | +0.0284 | −1.556 | +1.516 |
| 4 | −0.0056 | −0.0024 | −0.594 | +0.284 |
| 5 | −0.0154 | +0.0074 | −0.988 | +0.672 |
| 6 | +0.0018 | +0.0026 | −0.302 | +0.486 |
| 7 | −0.0050 | +0.0026 | −0.574 | +0.484 |
| 8 | −0.0184 | +0.0054 | −1.104 | +0.602 |
| 9 | −0.0110 | +0.0092 | −0.810 | +0.746 |
| 10 | +0.0014 | −0.0028 | −0.314 | +0.262 |
| $\bar{q}$ | −0.0080 | +0.0031 | $-0.688\times10^{-2}$ | $+0.628\times10^{-2}$ |
| $\sigma^2$ | $0.42\times10^{-4}$ | $0.22\times10^{-4}$ | $0.069\times10^{-4}$ | $0.039\times10^{-4}$ |
| $t$ | −1.81 | +1.96 | −3.91 | +4.78 |
| 有意水準 90% | モデル棄却 | | モデル棄却 | |
| 有意水準 95% | モデル採択 | | モデル棄却 | |
| 備考 | 有意水準 90% $t_{0.05}=1.83$ | | 〃 95% $t_{0.025}=2.26$ | |

表1

ることは既知の事実である[10]。
この問題は、大規模システムの最適化につながるものと、計算量減少のための有力な一手段を示していると思われるが、詳細はここでは略する。

＜参考文献＞


1. Kalman, R.E. T. ASME, 80, 2, pp. 468−478 (1958)
2. Yamamura, S. and Kaya, Y. T. AIEE, pt II, 81, pp 378−381 (1962)
3. Lee, R.C.K., Optimal Estimation, Identification, and Control, MIT Press (1964)
4. Narendra, K.S. et al T. IEEE, AC-9, 1, pp 31−38 (1964)
5. Rogers, A.E. and Steiglitz, K. IEEE, Nat. Cov. R. Pt. 3, pp. 65−73 (1967)
6. 茅. 計測と制御. 7, 3. pp. 151−161 (1968)
7. Wong, K.Y. et al T. IEEE, AC-12, 6 pp. 707−718 (1967)
8. 茅、志岐、第11回自動制御連合講演会予稿 No. 176 (1968)
9. Aström K.J. et al, in 'Theory of Self-Adaptive Control Systems', Plenum Pub. Co. (1966)
10. Tou, J.T. et al. T. AIEE, pt II, 80, pp. 193−196 (1961)



＜謝辞＞

本研究では本学大学院生志岐紀夫君の多大の協力を得た。厚く謝意を表する。